ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

1. $y' = \dfrac{y}{x+\sqrt{xy}}$ 2. $y' = \dfrac{x^3+y^3}{xy^2}$

ΛΥΣΗ

1. Η δοθείσα διαφορική εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{1+\sqrt{\frac{y}{x}}}, \quad (1)$$

και άρα είναι ομογενής. Εισάγοντας το μετασχηματισμό

$$y = xu, \quad (2)$$

παίρνουμε

$$xu' + u = \frac{u}{1+\sqrt{u}},$$

ή

$$xu' = -\frac{u\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}. \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) είναι χωριζόμενων μεταβλητών και, υποθέτοντας ότι $u \neq 0$, η γενική της λύση δίνεται από τον τύπο

$$2u^{-1/2} - \ln|u| = \ln|x| + C.$$

Έτσι, με βάση την (2), η *γενική λύση* της (1) είναι

$$2\sqrt{\frac{x}{y}} - \ln|y| = C, \quad (4)$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Επιπλέον, η (3) έχει ως ιδιόμορφη λύση τη συνάρτηση $u \equiv 0$ ή, ισοδύναμα, η (1) έχει ως *ιδιόμορφη λύση* την $y \equiv 0$.

Η δοθείσα διαφορική εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$y' = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{y}{x}, \quad (1)$$

και άρα είναι ομογενής. Εισάγοντας το μετασχηματισμό

$$y = xu, \quad (2)$$

παίρνουμε

$$xu' + u = \frac{1}{u^2} + u,$$

ή

$$xu' = \frac{1}{u^2}. \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) είναι χωριζόμενων μεταβλητών και η γενική της λύση δίνεται από τον τύπο

$$u^3 = 3\ln|x| + C,$$

οπότε, λόγω της (2), η *γενική λύση* της (1) είναι

$$y = x(3\ln|x| + C)^{1/3}, \quad (4)$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά.